

УДК 621.7

А.В.Яковченко, Н.И.Ивлева, А.А. Пугач

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ МЕТАЛЛА С УЧЕТОМ ИСТОРИИ ПРОЦЕССА НАГРУЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ А. НАДАИ

Разработаны метод и компьютерная программа определения напряжения течения металла с учетом истории процесса нагружения на основе уравнения А.Надаи, которое в наиболее общем виде устанавливает зависимость $\sigma = f(\tau, \varepsilon, U, T)$.

Ключевые слова: напряжение течения металла, степень и скорость деформации, температура, время, история процесса нагружения, сплайн-интерполяция кривых упрочнения

Введение

Существующие методы расчета напряжения течения металла, как по средним в очаге деформации значениям термомеханических параметров, так и с учетом истории процесса нагружения, основываются на аппроксимации экспериментальных данных. Важным этапом является выбор эмпирической формулы для представления результатов механических испытаний. Широкое использование получили степенные функции, полиномы первой и второй степени, а также экспоненциальные функции. Вместе с тем, еще в 80-е годы прошлого века в работе [1] было обосновано применение для этих целей сплайн-функций, которые могут обеспечить более высокую точность аппроксимации экспериментальных данных.

В настоящее время имеются обширные экспериментальные данные о зависимости напряжения течения металла σ от степени деформации ε , скорости деформации U и температуры T , представленные в виде соответствующих графиков. Определение на их основе значений σ является трудоемким процессом и не всегда достаточно точным. Целесообразно разработать соответствующие компьютерные программы и определять значения σ путем сплайн - интерполяции экспериментальной информации. После переработки всей имеющейся графической информации в электронную таким образом может быть наиболее рационально решена задача определения напряжения течения металла по средним в очаге деформации значениям ε, U, T .

Определение напряжения течения металла с учетом истории процесса нагружения является актуальной задачей. Анализ научных исследований по этой теме выполнен в работе [2]. Известно, что история нагружения зависит от вида процесса обработки металла давлением, величины деформации, времени деформирования, геометрии инструмента и цикличности процесса [3]. Наиболее широкое применение получила формула, разработанная в монографии [2]

$$\sigma = [b - (b - a) \cdot e^{-B\varepsilon}] \times [1 - A_1(1 - e^{-\lambda_1\tau}) - A_2(1 - e^{-\lambda_2\tau}) - A_3(1 - e^{-\lambda_3\tau})], \quad (1)$$

где a, b, B - постоянные, характерные для данного материала и температуры (являющиеся параметрами уравнений теории старения и наследственности); $A_{1,2,3}, \lambda_{1,2,3}$ - параметры ползучести, отражающие релаксационные свойства среды.

Левая часть формулы (1), заключенная в квадратные скобки, описывает мгновенное упрочнение металла от степени деформации ε . Другая часть выражения характеризует интенсивность разупрочнения в момент времени τ . Зависимость (1) является удачной аппроксимацией экспериментальных данных. Но, во-первых, входящие в нее коэффициенты можно получить только для фиксированных температур. Во-вторых, она не в полной мере отражает вязкие свойства металла. Это проявляется в том, что при изменении скорости деформации расчетное значение σ будет «реагировать» с некоторым запаздыванием на изменение U и только через накопленную деформацию.

Постановка задачи

Актуальной задачей является определение напряжения течения металла при его пластической деформации на основе уравнения А.Надаи [3], которое в наиболее общем виде устанавливает зависимость $\sigma = f(\tau, \varepsilon, U, T)$.

Целью работы является создание метода и компьютерной программы расчета напряжения течения металла на основе уравнения А.Надаи и сплайн-интерполяции кривых упрочнения.

Материалы и результаты исследования

По существу, уравнение А.Надаи является известным из математики выражением полного дифференциала. Если $\sigma = f(\tau, \varepsilon, U, T)$ дифференцируемая функция, то представленная ниже сумма называется полным дифференциалом и обозначается через $d\sigma$

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial \sigma}{\partial U} dU + \frac{\partial \sigma}{\partial T} dT + \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau, \quad (2)$$

здесь частные производные $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \sigma}{\partial U}, \frac{\partial \sigma}{\partial T}, \frac{\partial \sigma}{\partial \tau}$ характеризуют свойства металла к деформационному и скоростному упрочнению, температурному разупрочнению, изменению напряжения течения металла во времени в связи с его структурной неустойчивостью, соответственно.

Разделив левую и правую части уравнения (2) на $d\tau$ получим

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{\partial\sigma}{\partial U} \cdot \frac{dU}{d\tau} + \frac{\partial\sigma}{\partial T} \cdot \frac{dT}{d\tau} + \frac{\partial\sigma}{\partial\tau}, \quad (3)$$

здесь производные $\frac{d\varepsilon}{d\tau}, \frac{dU}{d\tau}, \frac{dT}{d\tau}$ - известные в рассматриваемой задаче функции, определяющие скорость изменения степени деформации, скорости деформации и температуры во времени $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_k$ в процессах обработки металлов давлением и соответственно определяющие историю процесса нагружения.

Произведя интегрирование уравнения (3), получим

$$\sigma(\tau_i) = \sigma(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_i} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{\partial\sigma}{\partial U} \cdot \frac{dU}{d\tau} + \frac{\partial\sigma}{\partial T} \cdot \frac{dT}{d\tau} + \frac{\partial\sigma}{\partial\tau} \right) d\tau, \quad (4)$$

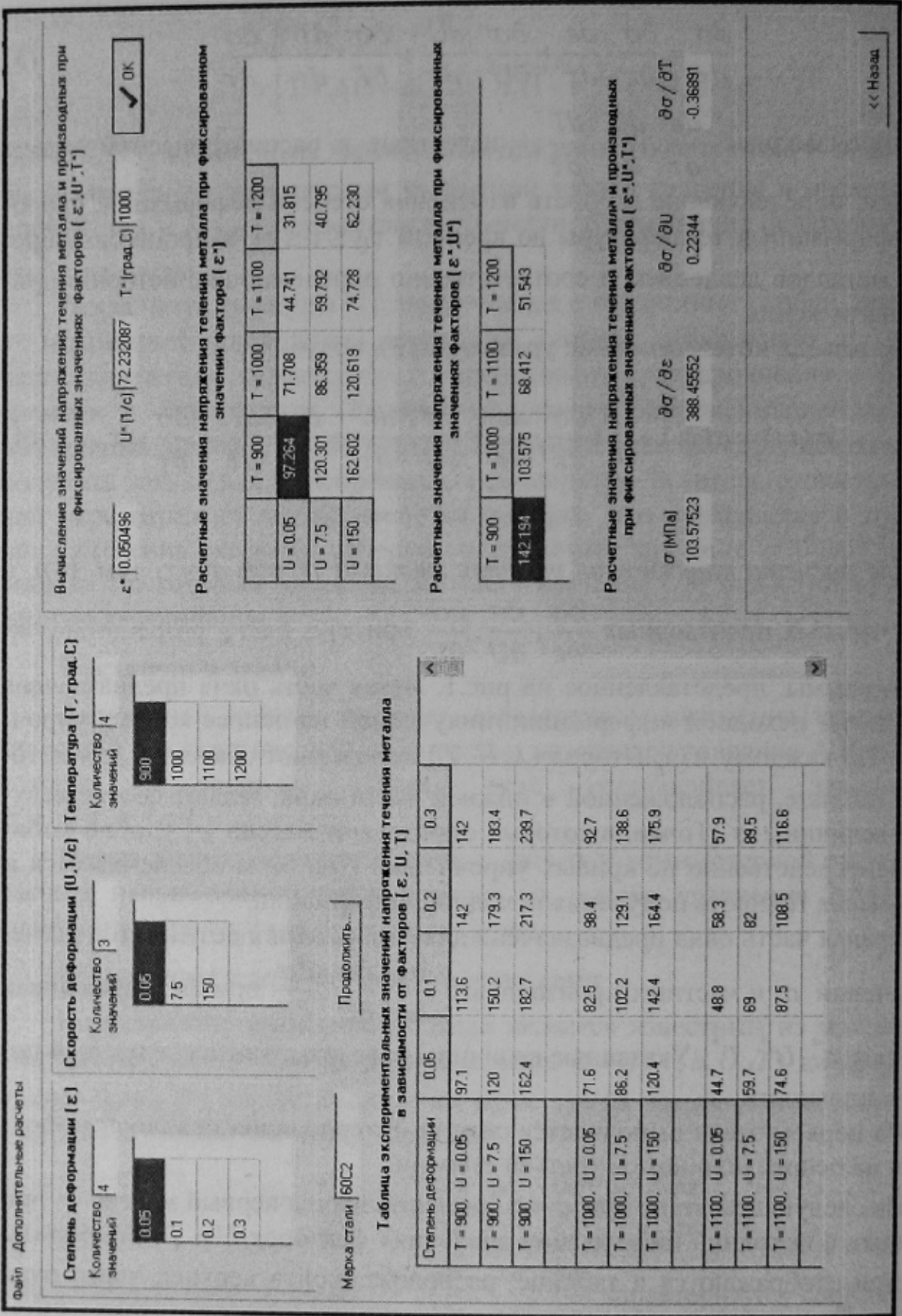
где $i=1,2,\dots,k$.

Для расчета напряжения течения металла σ при $\tau = \tau_1$ (см. (4)), а также частных производных $\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}, \frac{\partial\sigma}{\partial U}, \frac{\partial\sigma}{\partial T}$ при $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_k$ разработано окно программы, представленное на рис.1. Левая часть окна предназначена для задания исходной информации, получаемой на основе кривых упрочнения. По каждому из факторов (ε, U, T) определяют значения, для которых в таблице, расположенной в нижней части окна, задают соответствующие величины σ . Точки, в которых определяют массив σ , удобно выбирать непосредственно на кривых упрочнения. При этом обеспечивается и наибольшая точность получения исходной информации.

Правая часть окна предназначена для отображения результатов расчета значений σ и частных производных $\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}, \frac{\partial\sigma}{\partial U}, \frac{\partial\sigma}{\partial T}$ при фиксированных факторах ε^*, U^*, T^* . Указанные величины рассчитывают в следующей последовательности.

На первом этапе выполняется сплайн-интерполяция исходной информации на основе полиномов третьей степени.

На следующем этапе при $\varepsilon = \varepsilon^*$ рассчитывается первый массив σ при заданных в исходной информации значениях факторов U и T . Результаты расчетов отображаются в таблице, расположенной в верхней части окна (см. рис.1).



После выполнения сплайн-интерполяции полученных данных дополнительно задается величина $U = U^*$ и рассчитывается второй массив σ при заданных в исходной информации значениях фактора T . Результаты расчетов отображаются в другой таблице, расположенной ниже (см. рис.1).

Рисунок 1 – Окно программы сплайн-интерполяции кривых упрочнения, а также расчета напряжения течения металла и его частных производных

На заключительном этапе выполняется интерполяция полученных данных и рассчитывается искомая величина σ при $T = T^*$.

Расчет частных производных $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial U}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial T}$ при фиксированных значениях ε^* , U^* , T^* выполняется в следующей последовательности. Рассмотрим определение производной $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$. Вначале на основе изложенного выше

алгоритма выполняется расчет массива σ при $U = U^*$, $T = T^*$ и степенях деформации ε , заданных в таблице исходной информации. Сплайн-интерполяция полученных данных дает сплайн-функцию $\sigma = f(\varepsilon)$, на основе которой аналитически выводится формула для частной производной $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$. Расчет искомой производной выполняется при $\varepsilon = \varepsilon^*$.

Аналогично при определении производной $\frac{\partial \sigma}{\partial U}$ рассчитывается массив σ при $\varepsilon = \varepsilon^*$, $T = T^*$ и скоростях деформации U , заданных в таблице исходной информации. Сплайн-интерполяция полученных данных дает сплайн-функцию $\sigma = f(U)$, на основе которой аналитически выводится формула для частной производной $\frac{\partial \sigma}{\partial U}$. Расчет искомой производной выполняется при $U = U^*$.

При определении производной $\frac{\partial \sigma}{\partial T}$ рассчитывается массив σ при $\varepsilon = \varepsilon^*$, $U = U^*$ и температурах T , заданных в таблице исходной информации. Сплайн-интерполяция полученных данных дает сплайн-функцию $\sigma = f(T)$, на основе которой аналитически выводится формула для расчета частной производной $\frac{\partial \sigma}{\partial T}$. Расчет искомой производной выполняется при $T = T^*$.

Результаты расчета напряжения течения металла и частных производных отображаются в нижней части окна программы, показанного на рис.1. На основе изложенного метода разработана программа расчета этих величин при вычислении интеграла (4).

Следующий этап решения задачи связан с учетом истории нагружения. Историю процесса нагружения при обработке металла давлением определяют функции $\varepsilon(\tau)$, $U(\tau)$, $T(\tau)$. Исходная информация по ним задается в таблице, расположенной в верхней части окна программы, показан-

ного на рис.2. Предусмотрено четыре варианта задания и расчета этой информации.

Файл Дополнительно расчеты

Исходная информация

Количество точек 9

Тип задания информации в таблице

расчет ε по U $\varepsilon(I)$ $\varepsilon(II)$ $\varepsilon(III)$ $\varepsilon(IV)$

расчет U по ε

расчет T по U , ε $T(II)$

OK

Количество дополнительных точек на каждом интервале

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τ (сек)	0.00675	0.001317	0.001932	0.002524	0.003095	0.003652	0.004196	0.004733	0.005266
ε	0.050496	0.096869	0.138564	0.175025	0.205721	0.230164	0.247943	0.258742	0.262364
U (1/сек)									
T (град. C)	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

k 9 Просмотр

Тип расчета

в заданный момент времени

k равномерно распределенных значений k 12

Вариант расчета 2

Выполнить

Назад

Результаты расчета

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
τ (сек)	0.00675	0.001092	0.001510	0.001927	0.002344	0.002762	0.003179	0.003597	0.004014	0.004431	0.004849	0.005266
ε	0.050496	0.090849	0.110267	0.138246	0.164422	0.188414	0.209778	0.228004	0.242725	0.253528	0.260002	0.262364
U (1/сек)	72.232087	71.065378	68.707049	64.802357	60.089506	54.302010	47.410168	39.472342	30.574678	20.507957	11.615246	6.795497
T (град. C)	1000.000	1000.000	1000.000	1000.000	1000.000	1000.000	1000.000	1000.000	1000.000	1000.000	1000.000	1000.000
$\partial\sigma/\partial\varepsilon$	388.45552	393.59440	300.11990	284.12391	257.45848	220.01572	169.04408	127.69052	101.75088	84.41824	72.12183	63.04339
$\partial\sigma/\partial U$	0.22344	0.25215	0.26110	0.25472	0.24855	0.25178	0.27032	0.30360	0.35101	0.41389	0.47698	2.21632
$\partial\sigma/\partial T$	-0.36891	-0.42088	-0.45674	-0.48020	-0.49767	-0.50929	-0.51482	-0.51322	-0.50637	-0.49587	-0.48536	-0.47861
$d\varepsilon/d\tau$	72.23209	72.30220	68.90105	64.81317	60.30237	54.70225	47.49634	39.54155	30.81045	20.98460	8.62232	6.79550
$du/d\tau$	-3380.1164	-3297.0623	-8001.6203	-10197.4499	-12490.5039	-15270.8361	-17769.7302	-20133.3040	-22397.8529	-26066.0972	-14127.7196	-12536.7222
$dT/d\tau$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$d\sigma/d\tau$	27303.6900	27626.3977	18569.3880	15817.4718	12420.8813	8190.4517	3225.5403	-1063.4473	-4726.9226	-9019.6311	-6116.8388	-27366.9515
σ (МПа)	103.57523	115.63288	124.90426	132.09594	138.02863	142.34384	144.74879	145.16458	143.94103	141.10450	137.65636	134.81800

Дополнительно Построить графики

Рисунок 2 – Окно программы задания исходной информации и отображения результатов при расчете напряжения течения металла

По первому варианту расчета задается вся информация, то есть массивы τ, ε, U, T .

По второму варианту расчета массив U определяется в зависимости от таблично заданных значений ε и τ . Для этого воспользуемся известной зависимостью

$$U = \frac{d\varepsilon}{d\tau}. \quad (5)$$

Запишем (5) в виде конечно-разностного уравнения. В первой и последней точках временного интервала $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_k$ это уравнение будет иметь вид:

$$U_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\tau_2 - \tau_1}; \quad U_n = \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{\tau_k - \tau_{k-1}}. \quad (6)$$

В промежуточных точках уравнение имеет следующий вид

$$U_i = \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i-1}}{\tau_{i+1} - \tau_{i-1}}. \quad (7)$$

В формуле (7) производная $\frac{d\varepsilon}{d\tau}$ записана в виде симметричного конечно-разностного отношения, которое является более точным.

По третьему варианту расчета массив ε определяется в зависимости от таблично заданных значений U, τ . Из уравнений (6), (7) получаем:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + U_1(\tau_2 - \tau_1); \quad (8)$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1} + U_k(\tau_k - \tau_{k-1}); \quad (9)$$

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i-1} + U_i(\tau_{i+1} - \tau_{i-1}). \quad (10)$$

По четвертому варианту расчета массив τ определяется в зависимости от таблично заданных значений ε, U . Из уравнений (6), (7) получаем:

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{U_1}; \quad (11)$$

$$\tau_k = \tau_{k-1} + \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{U_k}; \quad (12)$$

$$\tau_{i+1} = \tau_{i-1} + \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i-1}}{U_i}. \quad (13)$$

В таблице, расположенной в верхней части окна программы, которое показано на рис.2, также задается k дискретных значений величины T в определенные моменты времени τ .

После определения массивов τ, ε, U, T , входящих в таблицу исходной информации (см.рис.2), выполняется их сплайн-интерполяция и получение сплайн-функций $\varepsilon = f(\tau), U(\tau), T(\tau)$. На их основе аналитически были выведены формулы для расчета производных $\frac{d\varepsilon}{d\tau}, \frac{dU}{d\tau}, \frac{dT}{d\tau}$, входящих в интеграл (4).

В итоге, нами определены алгоритмы расчета всех функций, входящих в уравнение (4), и их производных за исключением последнего слагаемого в подинтегральном выражении, которое в дальнейшем не учитывали.

Вычисление интеграла в уравнении (4) выполняется по методу Гаусса с точностью $1 \cdot 10^{-6}$.

Результаты расчета $\sigma(\tau)$, а также других величин и их производных отображаются в таблице, которая представлена в нижней части окна программы, показанного на рис.2.

Разработанная компьютерная программа и окна (см. рис.1,2) могут быть использованы для расчета напряжения течения металла в зависимости от времени τ в различных процессах обработки металлов давлением.

Рассмотрим частный пример – прокатку полосы на гладких цилиндрических валках с радиусом R . Выполним упрощенный расчет степени деформации ε и времени τ по длине очага L . Схема геометрического очага деформации и обозначения основных параметров даны в окне программы на рис.3.

Степень деформации ε определим по известной формуле

$$\varepsilon = \ln \frac{H}{h_T}, \quad (14)$$

где h_T - текущая по длине очага деформации толщина полосы.

$$h_T = F_2 - F_1; \quad F_1 = \sqrt{R^2 - y^2}; \quad F_2 = 2R + h - \sqrt{R^2 - y^2}, \quad (15)$$

здесь F_1, F_2 - границы контакта металла с валками.

Время τ движения частицы металла в очаге деформации необходимо поставить в соответствие с координатой y (см. рис.2). Связь между ними устанавливает известное уравнение

$$d\tau = \frac{dy}{V_y}, \quad (16)$$

где V_y - продольная составляющая скорости течения металла в очаге деформации.

Если, во-первых, принять гипотезу плоских сечений и, во-вторых, пренебречь уширением Δb , то функцию V_y определяет следующее известное уравнение

$$V_y = V_0 \frac{H}{h_T}, \quad (17)$$

где V_0 - скорость течения металла на входе в очаг деформации при $y = L$ (см. рис.3);

$$L = \sqrt{R \cdot \Delta h - \left(\frac{\Delta h}{2}\right)^2}; \quad \Delta h = H - h.$$

Подставим зависимость (17) в уравнение (16)

$$d\tau = \frac{h_T}{H \cdot V_0} dy. \quad (18)$$

Выполняя интегрирование уравнения (18), получим

$$\tau_i = \tau_0 + \int_{y_i}^L \frac{h_T}{H \cdot V_0} dy. \quad (19)$$

Расчет интеграла в формуле (19) выполняется по методу Гаусса с точностью $1 \cdot 10^{-6}$.

Результаты расчета по рассматриваемому примеру представлены на рис.1-5. Исходная информация о напряжении течения металла для стали 60С2 (по данным работы [2]) представлена на рис.1, а по основным параметрам очага деформации при прокатке полосы на гладких цилиндрических валках - на рис.3.

Результаты расчета массивов τ_i, ε_i , полученные в окне программы на рис.3 автоматически были переданы в окно программы на рис.2.

Результаты расчета напряжения течения металла σ с учетом истории процесса нагружения представлены в окне программы на рис.2.

На рис.4. представлены графики функций $\varepsilon(\tau), U(\tau), T(\tau), \sigma(\tau)$.

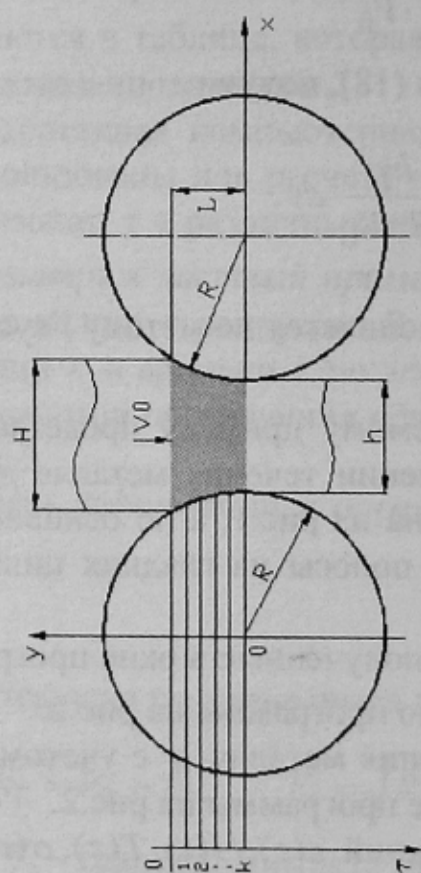
На рис.5 представлены графики функций $\sigma(\tau)$ (результаты расчета по формуле (4)), а также $\sigma_1(\tau), \sigma_2(\tau)$ (результаты расчета по формуле (1)). Так как расчеты по формуле (1) (как для одной, так и двух экспонент) выполняются только при $T = \text{const}$, то и по формуле А.Надаи (4) они были выполнены при постоянной температуре ($T = 1000^\circ\text{C}$).

Файл Дополнительные расчеты

Расчет массивов ε и τ по длине очага деформации

Исходная информация

H (мм)	78
h (мм)	60
R (мм)	220
V0 (мм/с)	10000

Количество разбиений
очага деформации

9

Вычислить

Результаты расчета

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
τ (сек)	0.000675	0.001317	0.001932	0.002524	0.003095	0.003652	0.004196	0.004733	0.005266	
ε	0.050496	0.096869	0.138564	0.175025	0.205721	0.230164	0.247943	0.258742	0.262364	
T (град. C)	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	
UT (мм)	55.361	48.441	41.521	34.601	27.681	20.761	13.840	6.920	0.000	
F_1 (мм)	212.920	214.601	216.046	217.262	218.252	219.018	219.564	219.891	220.000	
F_2 (мм)	287.060	285.399	283.954	282.738	281.748	280.982	280.436	280.109	280.000	
h_T (мм)	74.159	70.799	67.907	65.476	63.497	61.963	60.872	60.218	60.000	
V_y (мм/сек)	10517.9	11017.2	11486.2	11912.8	12284.1	12588.1	12813.9	12953.0	13000.0	

Передать информацию

<< Назад

Рисунок 3 – Окно программы расчета степени деформации ε и времени τ по длине очага деформации при прокатке

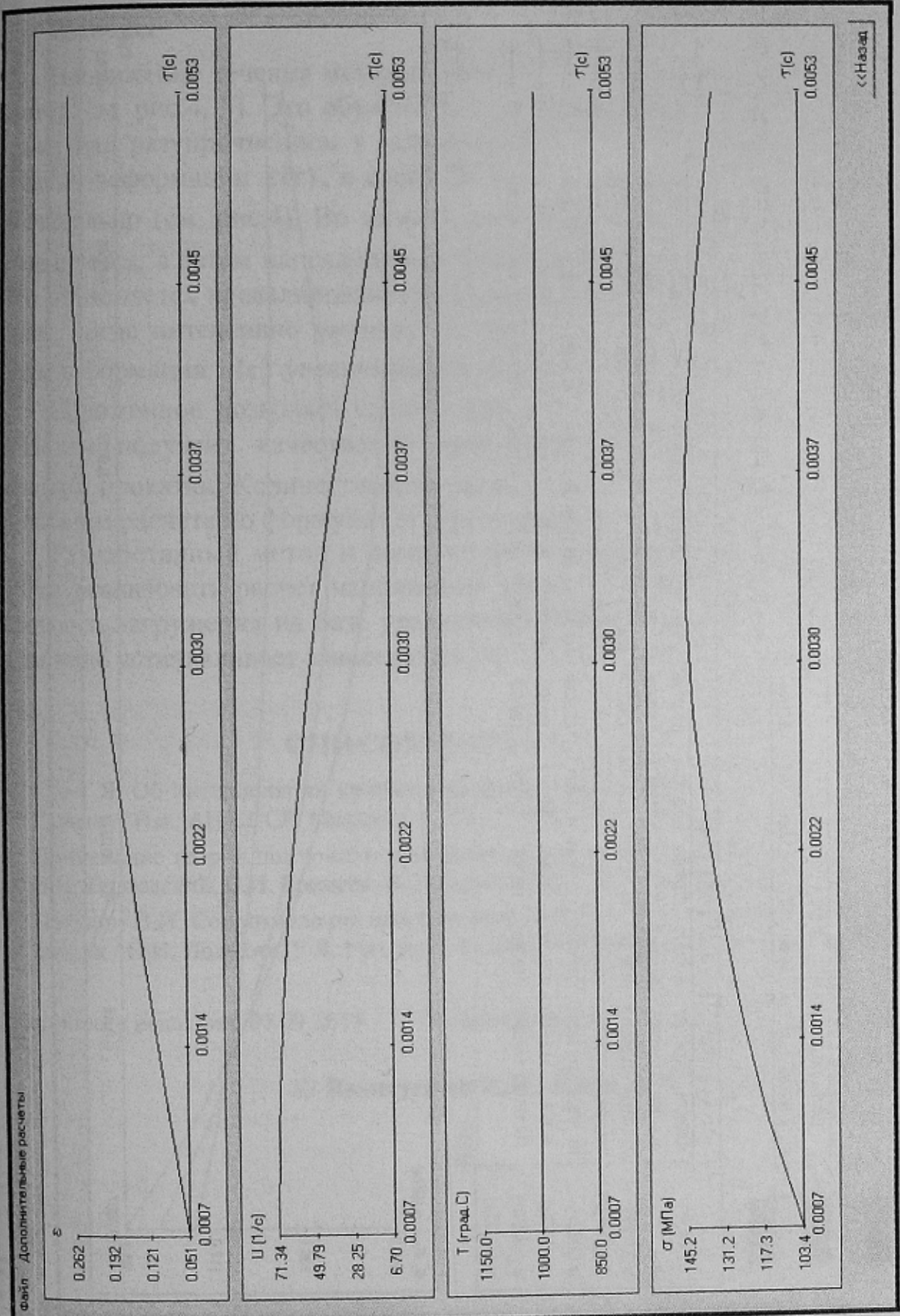


Рисунок 4 – Окно программы визуализации графических зависимостей $\epsilon(\tau)$, $U(\tau)$, $T(\tau)$, $\sigma(\tau)$

Выводы

Напряжение течения металла в начале очага деформации интенсивно растёт (см. рис.4, 5). Это объясняется превалированием процессов упрочнения над разупрочнением в условиях, когда интенсивно увеличивается степень деформации $\varepsilon(\tau)$, а скорость деформации $U(\tau)$ уменьшается незначительно (см. рис.4). Во второй половине очага деформации рост σ замедляется, а затем напряжение течения металла начинает уменьшаться. Это объясняется превалированием процессов разупрочнения над упрочнением, когда интенсивно уменьшается скорость деформации $U(\tau)$, а степень деформации $\varepsilon(\tau)$ увеличивается незначительно (см. рис.4).

Изложенное позволяет сделать вывод о том, что на базе уравнения А.Надаи получена качественно правильная зависимость $\sigma = f(\tau)$ для условий прокатки. Количественная оценка выполнена по отношению к результатам расчета по формуле (1) [2] (см. рис.5).

Разработанный метод и компьютерная программа позволили практически реализовать расчет напряжения течения металла с учетом истории процесса нагружения на базе уравнения А.Надаи, которое в наиболее общем виде устанавливает зависимость $\sigma = f(\tau, \varepsilon, U, T)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гун Г.Я. Об интерполяции кривых деформационного упрочнения / Г.Я. Гун, А.М. Галкин // Изв. АН СССР. Металлы. – 1982. - №4. - С.150 -152.
2. Применение теории ползучести при обработке металлов давлением / А.А. Поздеев, В.И. Тарновский, В.И. Еремеев, В.С. Баакашвили. – М.: Металлургия, 1973. - 192с.
3. Полухин П.И. Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов: справочник / П.И. Полухин, Г.Я. Гун, А.М. Галкин. - М.: Металлургия, 1983. - 352с.

Поступила в редакцию 07.09.2010

Рецензент д-р техн. наук, проф. Ю.В. Коновалов

© Яковченко А.В., Ивлева Н.И., Пугач А.А., 2010