О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

МЕТОДОВ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ К АНАЛИЗУ И СИНТЕЗУ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ И АЛГОРИМОВ

Аноприенко А. Я., к.т.н., доцент (каф. ЭВМ)

«Аппарат стохастической геометрии
не просто эффективен, он необычайно эффективен»

Федотов Н. Г. Методы
стохастической геометрии
в распознавании образов

Интенсивное развитие таких направлений в современной информатике как машинная графика, нейроинформатика и массивно-параллельные среды выдвигает проблему адекватного развития соответствующего аналитического аппарата. Традиционно используемые в “информатике последовательных ЭВМ” теоретические методы в новой ситуации далеко не всегда оказываются достаточно эффективными. В связи с чем актуальны поиски такого теоретического инструментария, который бы полнее соответствовал более геометрическому характеру “информатики параллельных ЭВМ”. В данной работе высказываются некоторые соображения по использованию в этих целях аппарата стохастической геометрии.

1. Алгебра и геометрия в информатике

До Рене Декарта математика рассматривалась преимущественно как геометрия. Даже Франсуа Виет (1540-1603), фактически проложивший путь алгебре введением в работе “Аналитическое искусство” систематического использования буквенных обозначений (и такого незаменимого сегодня понятия как *коэффициент*), рассматривал алгебру не более как “королевскую дорогу” к геометрии. Ситуация качественно изменилась только с выходом в свет в 1637 году работы Декарта “Рассуждение о методе”. В качестве дополнения к ней была опубликована “Геометрия”, в которой впервые для изложения аналитической геометрии использовалась алгебраическая символика практически в современном виде. С этого времени математика стала развиваться преимущественно алгебраическим путём.

И именно алгебраическая математика лежит как в основе современного программирования, так и в основаниях практически всего теоретического аппарата современной информатики. На этой же основе предпринимались в основном и многочисленные попытки по созданию искусственного интеллекта. Но, по большому счёту, необходимо признать, что реальные результаты здесь оказались неизмеримо скромнее радужных ожиданий. Искусственный интеллект, по-существу, остается почти такой же далёкой целью, как это было и тридцать лет назад. Правда, благодаря именно этим работам удалось создать целый ряд полезных экспертных систем и существенно продвинуться на пути автоматического перевода и распознавания текстов.

Всё сказанное, естественно, не означает, что геометрическое направление в информатике не развивалось совсем. Здесь также были получены многие интересные результаты, которые, однако, практически не влияли на магистральные пути развития компьютерных технологий. Одним из наиболее кардинальных шагов в этой области был сделан примерно в 1985 году с формированием нейроинформатики как отдельного научного направления. Этот факт в работе [4] интерпретируется как решающий поворот в эволюции идей компьютерного круга наук. При этом делается вывод, что следующее поколение компьютеров будет гибридным, сбалансированно объединяющим подходы каждого из “теоретических пространств” (рис. 1).

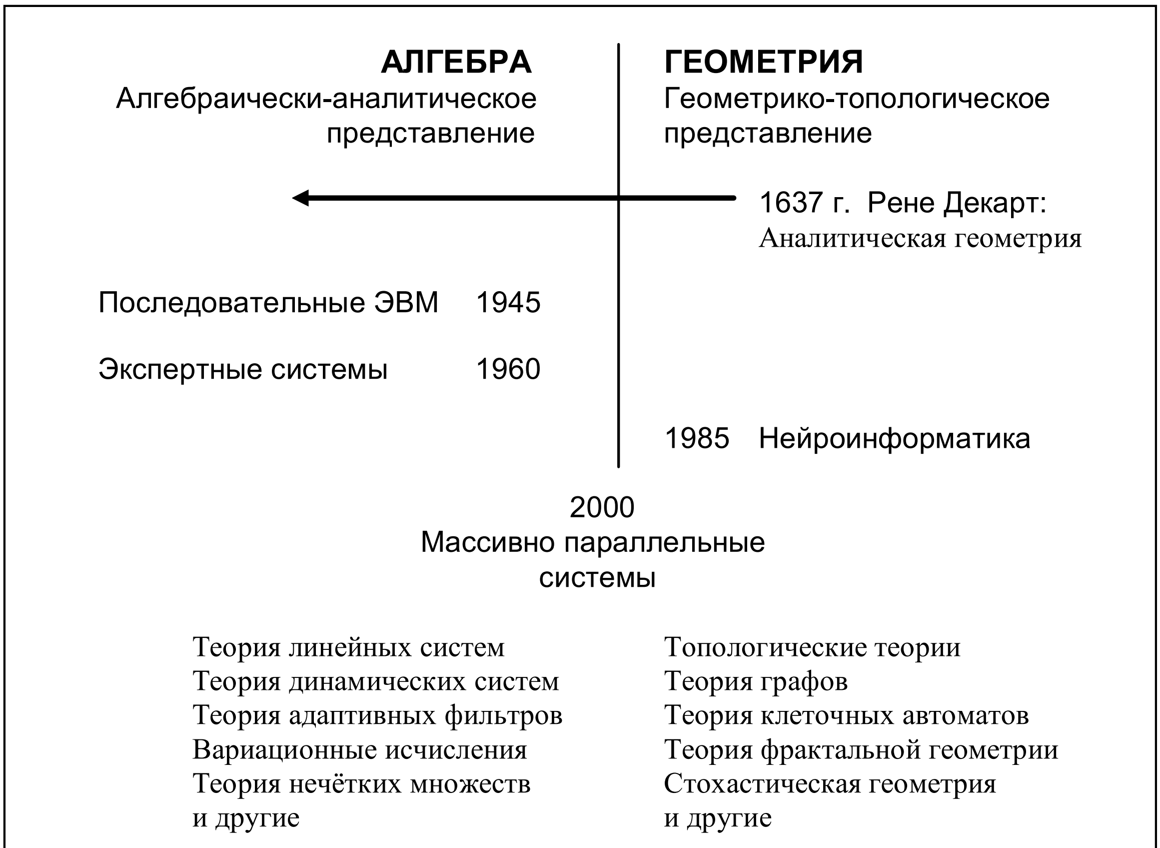


Рис. 1. Два “теоретических пространства” информатики (по материалам работы [4])

Дополнительно необходимо отметить следующее. Во-первых, представленное на рис. 1 деление на два “пространства” соответствует принципу организации человеческого мозга, в котором левому полушарию соответствует преимущественно символьно-аналитическое мышление, а правому — образно-интуитивное. Во-вторых, из перечисленных в правой части теоретических направлений стохастическая геометрия является пока наименее проработанным. Однако уже есть основания утверждать, что практическое рассмотрение вопросов применения стохастической геометрии к задачам прикладной информатики [1, 3] подтвердило достаточно высокий потенциал этого направления.

2. Обзор стохастической геометрии

Первой задачей в теории геометрических вероятностей считается задача о бросании иглы (см. далее), поставленная и решенная Бюффоном в 1777 году. Но интенсивное развитие этой “красивой и чарующей ветви математики” [2, с. 7] началось лишь в конце 30-х годов в результате работ Бляшке и его школы, которые в рамках математического семинара в Гамбургском университете опубликовали серию статей под общей рубрикой

“Интегральная геометрия”. На симпозиуме по интегральной геометрии и геометрическим вероятностям, состоявшемся в ФРГ в июне 1969 года, был предложен термин “Стохастическая геометрия”, который более точно отражает суть рассматриваемого направления и в настоящее время стал общеупотребимым. Прекрасным введением в эту область математики является книга профессора Сантало [2], который в течение многих лет был неоспоримым лидером в исследованиях по интегральной геометрии.

Из всего теоретического арсенала стохастической геометрии практическое применение в информатике наши пока лишь разделы, рассматривающие выпуклые множества, множества прямых, решетки фигур и решетки точек на плоскости.

Одним из ключевых из используемых при этом понятий является *решетка фундаментальных областей* на плоскости, которой называется последовательность конгруэнтных регионов области $\alpha_1, \alpha_2,...$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) каждая точка в плоскости принадлежит одному и только одному региону α_i;

2) каждое α_i может быть совмещено с α_0 движением t_i так, что при этом каждое α_h совмещается с некоторым α_s, т. е. это движение переводит всю решетку в себя.

Достаточно хорошо проиллюстрировать подходы стохастической геометрии позволяют следующие примеры [см. 3]:

С практической точки зрения весьма полезным в ряде применений оказывается следующее утверждение: среднее значение числа частей h, на которые замкнутая область K_1 площадью S_1, ограниченная кривой длиной L_1, будет разделена, когда ее случайно бросают на решетку фундаментальных областей площадью α_0 и с контуром длиной L_0,

$$h = \frac{2\pi(\alpha_0 + S_1) + L_0 L_1}{2\pi\alpha_0} \qquad (1)$$

Число H фундаментальных областей, имеющих общие точки с областью K_1, очевидно, удовлетворяет условию $H \le h$.

Применяя этот вывод к случаю решетки квадратов со стороной a ($S_0=a^2$, $L_0 = 4a$), мы находим, что каждая область K_1 может быть покрыта

$$H_1 = 1 + \frac{2L_1}{\pi a} + \frac{S_1}{a^2} \qquad (2)$$

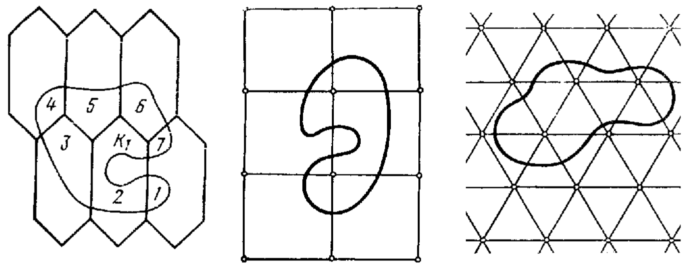
или меньшим числом квадратов.

Для решетки (см. рис. 2), состоящей из правильных шестиугольников со стороной a, минимальное число шестиугольников, которыми можно покрыть область K_1, не превышает

$$H_2 = 1 + \frac{2L_1}{\sqrt{3}\,\pi a} + \frac{2S_1}{3\sqrt{3}\,a^2} \qquad (3)$$

Для решетки точек справедливо следующее утверждение: пусть каждая фундаментальная область решетки содержит m точек, тогда среднее число точек M в области K_1 площадью S_1, помещенной случайно на плоскости,

$$M = \frac{mS_1}{\alpha_0}\ . \qquad (4)$$



а б в

Рис. 2. Примеры решёток областей (а) и точек (б и в)

3. Распознавание образов

Применить ядро стохастической геометрии — интегральную геометрию — для решения задач распознавания образов впервые предложил еще в 1962 году американский профессор А. Новиков [5]. Однако в информатике эти идеи не получили должного развития. В русскоязычной литературе практически первой публикацией на эту тему стала работа [3], в которой не только выполнен соответствующий теоретический анализ, но и предложены конкретные структуры технических устройств.

Принцип распознавания при этом следующий. Пусть для распознавания предъявлены два класса объектов или два образа, представляющие собой решетки параллельных линий, произвольно ориентированные на плоскости и отличающиеся расстояниями между линиями - у одного из образов это расстояние равно a, у другого — a'. Для решения этой задачи распознавания применима теорема Бюффона: если мы случайным образом бросаем на решетку иголку, т. е. ориентированный отрезок длины l, которая не превышает расстояния между линиями решетки, то вероятность того, что иголка пересечет линию, а не просто упадет между ними, равна $(2/\pi)(l/a)$. Пусть выбрали иголку с длиной, равной меньшему расстоянию между прямыми $l=a<a'$, осуществили многократное случайное бросание иголки на изображение решетки на плоскости (причем случайность бросания означает, что реализуется произвольный выбор ориентации и положения иголки на плоскости), произвели подсчет и усреднение числа случаев пересечения, тогда в итоге получим число — оценку вероятности пересечений. Если полученное число близко к $2/\pi$, то это — решетка параллельных линий с меньшим расстоянием a между линиями. Если же число не превышает $(2/\pi)(a/a')$, то в эксперименте была предъявлена решетка линий с большим расстоянием a' между ними.

Таким образом, описанный выше бюффоновский процесс, заключающийся в случайном бросании направленных отрезков линий и подсчете среднего числа их пересечений с изображением объекта, оказывается чувствительным к форме объектов. Полученные в результате числа оценки вероятностей пересечений с изображением объекта характеризуют геометрические параметры объектов. Отсюда можно сделать вывод о потенциальных возможностях применения данного процесса для распознавания образов. Следует сразу же отметить, что результат распознавания при таком подходе не зависит от ориентации и расположения изображений объектов. Это ценное свойство, свидетельствующее о достижении значительной гибкости распознавания, так как если способ распознавания не зависит от ориентации и параллельного смещения, то, следовательно, сами объекты могут претерпевать такие изменения, а именно, повороты и переносы в поле изображения.

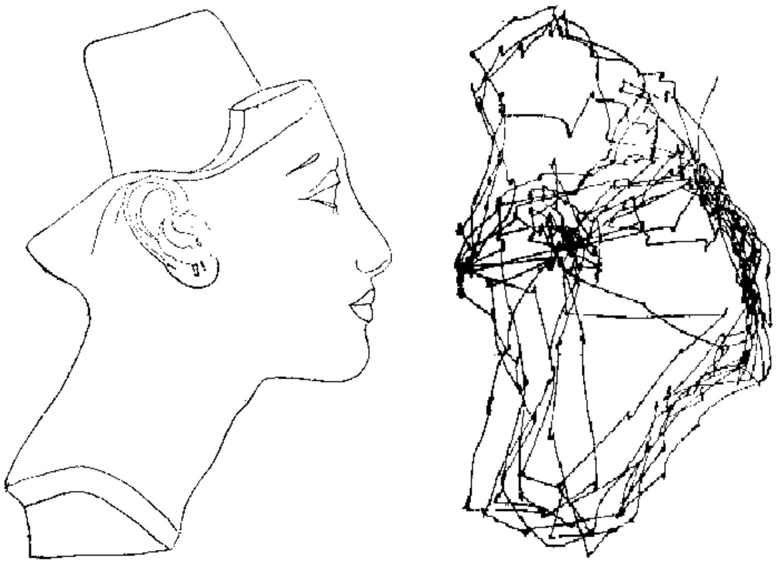


Рис.3. Траектория движения глаз при сканировании изображения (по А. Л. Ярбусу)

Традиционно используемые методы распознавания в общем случае по разным причинам оказываются малоэффективными: интегральные методы на основе быстрого преобразования Фурье — из-за значительных погрешностей, обусловленных появлением в спектре дополнительных частот, вызванных дискретизацией изображений, а структурные методы, заключающиеся в оконтуривании изображения путем выделения ребер — из-за громоздкости и чрезвычайной чувствительности к любым изменениям освещенности. На этом фоне методы стохастической геометрии обладают целым рядом преимуществ. Одно из них — соответствие природе человеческого распознавания, которое носит характер стохастического сканирования (рис. 3).

4. Системы машинной графики

Аппарат стохастической геометрии является чрезвычайно эффективным и при анализе высокопроизводительных систем машинной графики. Характерным примером является исследование производительности различных вариантов доступа к памяти изображений при генерации графических примитивов (рис. 4) [1]. При этом с целью обеспечения максимальной достоверности анализа теоретические результаты могут быть проверены имитационным моделированием.

Одним из наиболее важных вопросов при имитационном моделировании является выбор модели рабочей нагрузки, в качества которой рассматривается совокупность графических примитивов, образующих генерируемое изображение. В простейшем случае для этих целей берется ряд конкретных изображений. Однако такому подходу присущ ряд недостатков: выбор тестовых изображений во многом субъективен, отсутствует возможность гибкого управления параметрами рабочей нагрузки для исследования их влияния на полученные результаты, крайне ограниченные возможности аналитического описания рабочей нагрузки приводят к недостаточной общности результатов моделирования

. Поэтому с целью обеспечения достаточно объективного сравнительного исследования был выбран подход, основанный на использовании вероятностной модели рабочей нагрузки. Моделируются изображения, представленные двумя типами примитивов: векторами и выпуклыми закрашенными многоугольниками (гранями).

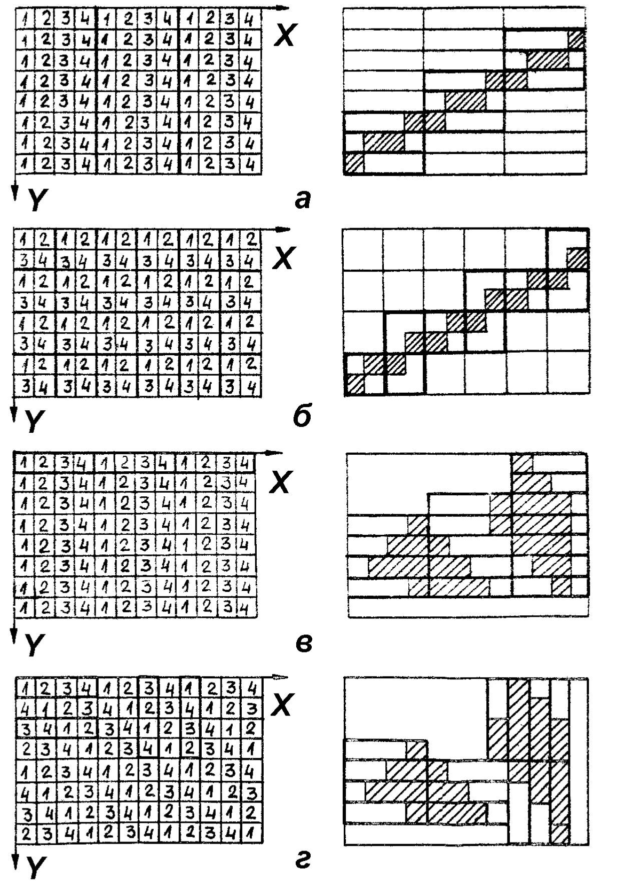


Рис. 4. Примеры возможных форматов доступа к памяти кадра при генерации векторов (а и б) и закрашенных многоугольников (*в* и *г*)

При моделировании векторной рабочей нагрузки предполагается равномерное распределение векторов по полю растра и равномерное распределение углов наклона в пределах от 0 до 90 градусов. Моделируются три варианта распределения длин векторов. В первом варианте (нагрузка 0) длина каждого вектора в пределах растра максимальна. Во втором варианте (нагрузка 1) длины векторов распределяются равномерно. Третьим вариантом (нагрузка 2) является экспоненциальное распределение векторов.

При генерации граней для моделирования рабочей нагрузки реализован ряд вариантов моделей, учитывающих основные особенности различных реальных и синтезируемых в ЭВМ изображений: равномерное распределение по полю растра прямоугольников с равномерно распределенными размерами сторон (нагрузка 0), равномерное распределение по полю растра произвольных выпуклых четырехугольников с равномерным (нагрузка 1) и экспоненциальным (нагрузка 2) распределением их размеров, а также два варианта нормального распределения по полю растра произвольных выпуклых четырехугольников.

Актуальность подобного рода исследований в настоящее время обусловлено тем, что наблюдается отставание темпов роста пропускной способности памяти кадра от темпов роста быстродействия **аппаратных генераторов векторов**. В работе [1], в частности, предлагается структура быстродействующего генератора, реализующего модифицированный алгоритм Брезенхэма и позволяющего вычислять каждую новую точку вектора с максимальной точностью за один такт синхронизации.

Для достижения максимальной производительности быстродействие генератора векторов должно быть сбалансировано с пропускной способностью памяти кадра, что в общем случае обеспечивается возможностью одновременной модификации нескольких пикселей.

Как известно из стохастической геометрии, если фундаментальные регионы некоторой решетки имеют площадь α_0, и каждая содержит кривую длины L_0, то среднее значение числа точек пересечения этих кривых с кривой D_1 длины L_1, брошенной случайно на плоскость равно

$$E = \frac{2L_0 L_1}{\pi \alpha_0}. \quad (5)$$

Исходя из данного утверждения может быть получена расчетная формула для теоретической оценки коэффициента ускорения доступа к памяти кадра K_A при возможности одновременной модификации нескольких пикселей:

$$K_A = \frac{M_v \pi W_x W_y}{2L_1(W_x + W_y)}, \quad (6)$$

где M_v — среднее количество пикселей, образующих вектор при реализаций четырехточечного алгоритма, L_1 — среднее значение длины вектора, W_x — размер слова доступа к памяти по оси x, W_y — размер слова доступа к памяти по оси y. При $W_y = 1$ и возрастающих значениях W_x в предельном случае получаем

$$\lim_{Wx \to \infty} \frac{M_v \pi W_x W_y}{2L_1(W_x + W_y)} = \frac{M_v \pi}{2L_1}, \quad (7)$$

что согласуется с решением задачи Бюффона о бросании иглы: при бросании отрезка длины L на множество параллельных прямых с единичным промежутком ожидаемое число пересечений есть $2\pi^{-1}L$.

При одноформатном доступе для нагрузки 2 при $X = У = 512$ расчетное значение K_A при $W_x \to \infty$ не превышает 1,36.

В работе [1] рассмотрена также структура быстродействующего **генератора выпуклых граней** с однородной закраской. В состав генератора входят два параллельно работающих генератора границ грани и генератор маски записи, выполненный в виде быстродействующей логической схемы и реализующий параллельно формирование маски для текущего цикла модификации памяти при построчной закраске граней.

Исходя из иэвестного положения интегральной геометрии о том, что среднее значение числа кусков, на которые замкнутая область D_1 площади F_1, ограниченная единственной кривой длины L_1 будет разделена, когда она случайно бросается на решетку фундаментальных областей площади α_0 с контуром L_0, равно

$$E = \frac{2\pi(\alpha_0 + F_1) + L_0 L_1}{2\pi \alpha_0}, \quad (8)$$

получены расчетные формулы для теоретической оценки K_A для первого:

$$K_A = \frac{\pi W_x W_y F_1}{\pi(W_x W_y + F_1) + 2(\Delta x + \Delta y)(W_x + W_y)}, \quad (9)$$

и последующих вариантов нагрузки:

$$K_A = \frac{\pi W_x W_y F_1}{\pi(W_x W_y + F_1) + 4\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\,(W_x + W_y)}, \quad (10)$$

где F_1 средняя площадь грани в пикселях, Δx и Δy — средние габаритные размеры грани по осям x и y соответственно.

Полученные формулы позволяют при известных характеристиках нагрузки оценить значение коэффициента ускорения доступа к памяти (по сравнению со случаем $W_x = W_y = 1$) при заданных значениях W_x и W_y. Практически полное совпадение (в пределах 1% погрешности) результатов имитационного моделирования с расчетными значениями [1] подтверждает эффективность использованных методов.

Естественно, что приведенные примеры использования стохастической геометрии для анализа компьютерных систем отнюдь на исчерпывают все многообразие возможных применений и лишь демонстрируют возможные при этом подходы.

5. Массивно-параллельные системы

Одной из наиболее перспективных областей приложения методов стохастической геометрии является анализ массивно-параллельных систем и алгоритмов. При этом могут быть выделены следующие направления:

- анализ высокопроизводительных систем реалистичной машинной графики, в которых матрица процессоров соответствует полю кадра изображения;
- анализ и синтез алгоритмов распознавания изображений на матрицах процессоров;
- анализ эффективности алгоритмов и структур при организации массивно-параллельного моделирования и расчётов различных пространственных и сетевых структур.

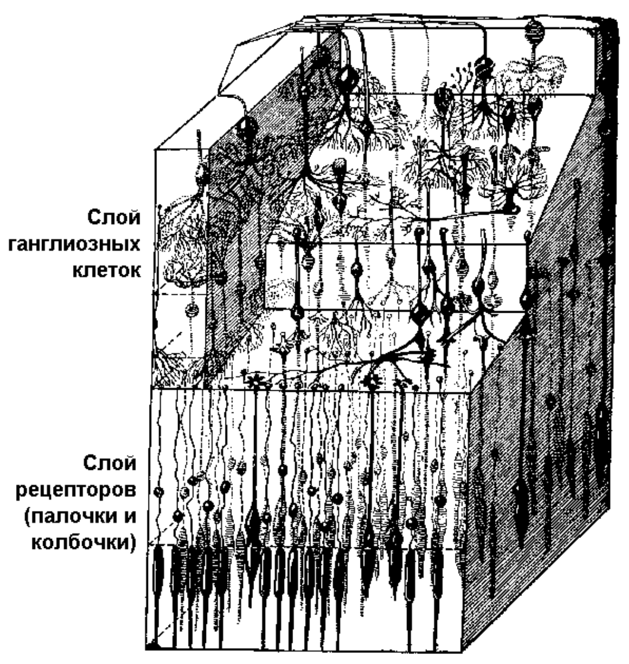


Рис. 5. Структура сетчатки глаза

Важным моментом является использование стохастической геометрии не только для анализа и синтеза систем распознавания изображений, но и для понимания некоторых принципов человеческого мышления вообще. Наиболее совершенный на сегодня инструмент распознавания — человеческий глаз — является фактически непосредственной частью мозга, имеющей “выход вовне”. Процессы, происходящие уже в слое ганглиозных клеток, соответствуют, в основном, процессам и в других тканях мозга. Учитывая принципиальную стохастичность пространственной организации нервных клеток и их связей (рис. 5), следует предполагать применимость стохастической геометрии для анализа и описания происходящих в них процессов в аспекте их пространственного взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аноприенко А. Я. Повышение производительности систем генерации изображений: структуры и алгоритмы на уровне регенерационной памяти. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата технических наук. — Киев, 1987, 20 с.
2. Сантало Л. А. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. — М.: Наука, 1983, 360 с.
3. Федотов Н. Г. Методы стохастической геометрии в распознавании образов. — М.: Радио и связь, 1990, 144 с.
4. Eckmiller R. Concerning the emerging role of geometry in neuroinformatics, in: Parallel Processing in Neural Systems and Computers, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1990, p. 5-8.

5. Novikoff A. B. Integral geometry as a tool in pattern perseption, in: Principles of self-organization. — Pergamon Press, 1962, p. 347-368.

Как правильно ссылаться на эту статью:

Аноприенко А.Я. О некоторых приложениях стохастической геометрии к анализу и синтезу вычислительных систем и алгоритмов // Сборник трудов факультета вычислительной техники и информатики. Вып.1. – Донецк: ДонГТУ. – 1996. С. 129-137.